

ph260 Ffiseg damcaniaethol 2 — gweithdy 6 — datrysiaidau

1. Trawsfurfiadau Fourier.

Penderfynwch ar drawsffurfiadau Fourier i'r ffwythiannau canlynol:

a. $f(x) = \{-1 \quad (-\pi < x < 0); \quad +1 \quad (0 < x < \pi); \quad 0 \quad (\text{felarall})\}.$

$$g(q) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-jqx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-jqx} dx = \frac{j}{2\pi q} (e^{-jq\pi} + e^{jq\pi} - 2) = \frac{j}{q\pi} (\cos q\pi - 1)$$

b. $f(t) = e^{-kt}g(t)$, ble $g(t) = \{1 \quad (0 \leq t \leq b); \quad 0 \quad (\text{felarall})\}.$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^b 0be^{-kt}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{e^{-(k+j\omega)t}}{k+j\omega} \right]_0^b$$

Nawr, nodwch yn gyffredinol na fydd yr esbonydd wedi darfodi i werth sy'n arbrol agos i sero. Felly,

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{e^{-(k+j\omega)b}}{k+j\omega} + \frac{1}{k+j\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{k-j\omega}{k^2+\omega^2} \left(1 - e^{-kb}e^{-jb\omega} \right)$$

Mae'n bwysig gwahaniaethu rhwng y esbonydd cyntaf (real), sy'n ffwythiant sy'n darfodi, a'r ail (gymhlyg), sydd yn ffactor cydwedd, h.y. yn cynrhycholi $\cos b\omega + j \sin b\omega$. Mae hyn yn achosi'r spectrwm i gynnwys cydrannau cosin a sin yn ei rhannau real a dychmygol (oherwydd mae'r $j\omega$ yn y cynffactor yn cyfuno gyda'r $j \sin b\omega$ yn y ffactor cydwedd i ffurfio cyfraniad real).

2. Cyfrifio spectrwm.

Mesurir signal cymhlyg parth-amser mewn arbrawf. Wedi darfod cychwynol cyflym gyda cysonyn amser k_1 , mae'n darfodi'n esbonyddol gyda cysonyn amser k_2 a mae efo dau don cosin wedi eu arosod gyda cyfnodau o $1/c_1$ and $1/c_2$. Am rhesymau arbrol, dim ond yr ystod amser rhwng t_1 a t_2 gellir ei arsylwi. Ffeindiwch y ffwythiant $f(t)$ sy'n disgrifio'r system hwn a'r spectrwm cyfatebol $F(\omega)$ (Bydd gennych pedwar term i bob cyfuniad o $k_{1,2}$ a $c_{1,2}$ - mae'n nhw gyd a'r un ffurf, felly manteisiwch ar y cymesuredd i gadw'r hafaliadau yn syml) Os oes gennych gyfrifiadur gyda meddalwedd mathemategol arno, plotiwch y rhannau real a dychmygol o $f(t)$ a $F(\omega)$ ac arbrowfch fel mae newidiadau i'r paramedrau $k_1, k_2, c_1, c_2, t_1, t_2$ yn effeithio'r spectrwm.

Yn benodol, ymchwiliwch y canlynol:

Y signal parth-amser yw $f(t) = (e^{-k_1t} + e^{-k_2t}) (e^{jc_1t} + e^{jc_2t})$. Y spectrwm yw

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} (e^{-k_1t} + e^{-k_2t}) (e^{jc_1t} + e^{jc_2t}) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{kc} \int_{t_1}^{t_2} e^{-(k+j(\omega-c))t} dt, \text{ lle } \sum_{kc} \text{ yw'r swm o'r pedwar term i bob cyfuniad o } k_{1,2} \text{ and } c_{1,2}.$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum_{kc} \left[\frac{e^{-(k+j(\omega-c))t}}{k+j(\omega-c)} \right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{kc} \left(\frac{k-j(\omega-c)}{k^2+(\omega-c)^2} \left(e^{-(k+j(\omega-c))t_2} - e^{-(k+j(\omega-c))t_1} \right) \right).$$

Er mwyn gwahanu rhannau real a dychmygol y spectrwm o'u gilydd mae angen rhannu'r ffactor cydwedd i'w cydrannau real a dychmygol:

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum_{kc} \frac{k-j(\omega-c)}{k^2+(\omega-c)^2} \left(e^{-kt_2} (\cos((\omega-c)t_2) + j \sin((\omega-c)t_2)) - e^{-kt_1} (\cos((\omega-c)t_1) + j \sin((\omega-c)t_1)) \right).$$

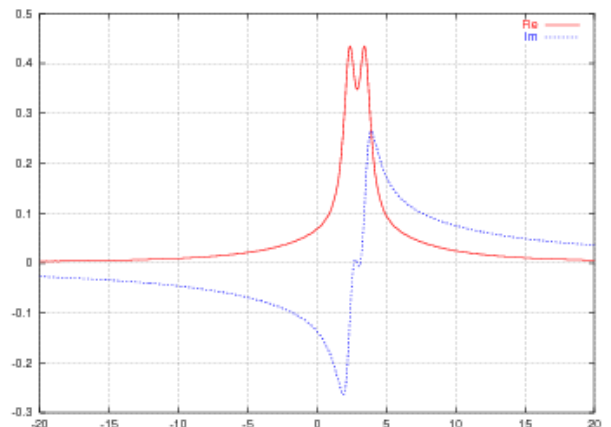
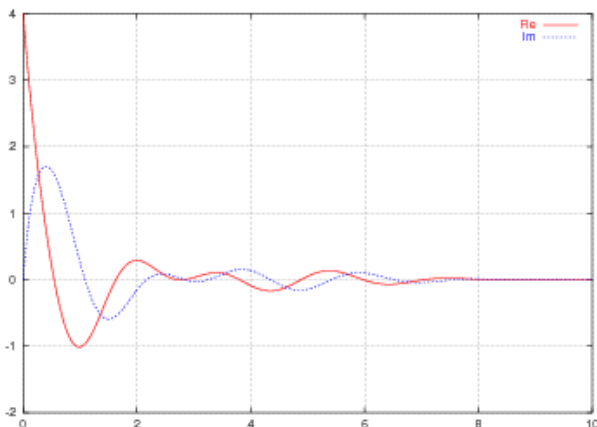
Drwy hollti'r rhannau real o'r dychmygol, rydym yn ffeindio'r spectrwm real

$$\mathcal{R}(F(\omega)) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{kc} \left(\frac{k}{k^2+(\omega-c)^2} \left(e^{-kt_2} \cos((\omega-c)t_2) - e^{-kt_1} \cos((\omega-c)t_1) \right) \right)$$

$$+ \frac{\omega-c}{k^2+(\omega-c)^2} \left(e^{-kt_2} \sin((\omega-c)t_2) - e^{-kt_1} \sin((\omega-c)t_1) \right), \text{ a}$$

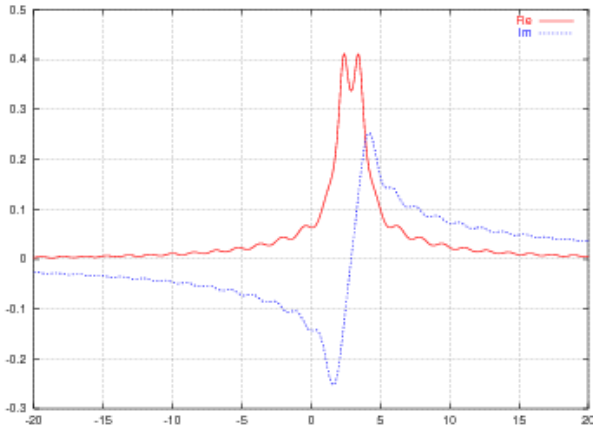
$$\mathcal{I}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{kc} \left(\frac{\omega-c}{k^2+(\omega-c)^2} \left(e^{-kt_2} \cos((\omega-c)t_2) - e^{-kt_1} \cos((\omega-c)t_1) \right) \right)$$

$$+ \frac{k}{k^2+(\omega-c)^2} \left(e^{-kt_2} \sin((\omega-c)t_2) - e^{-kt_1} \sin((\omega-c)t_1) \right).$$



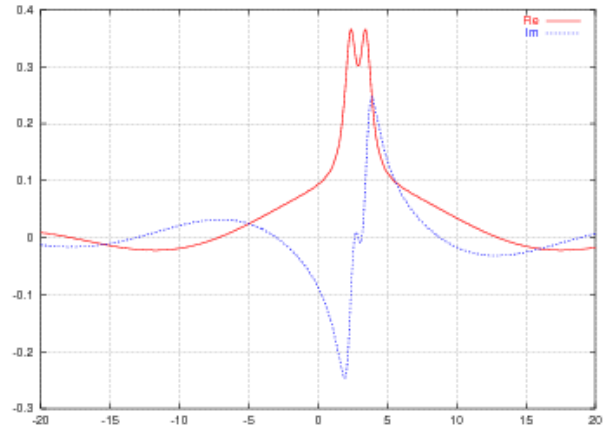
a. Beth yw effaith cwtdogi'r darfodiad cyn ei fod yn agos i sero (h.y. t_2 rhy fach)?

Yn y ddelwedd isod, mae'r pwynt cwtdogi wedi ei osod i $t_2 = 4$, ble mae dal llawer o signal yn y parth amser. O ganlyniad, mae wigliadau yn ymddangos yn y rhannau real a dychmygol.



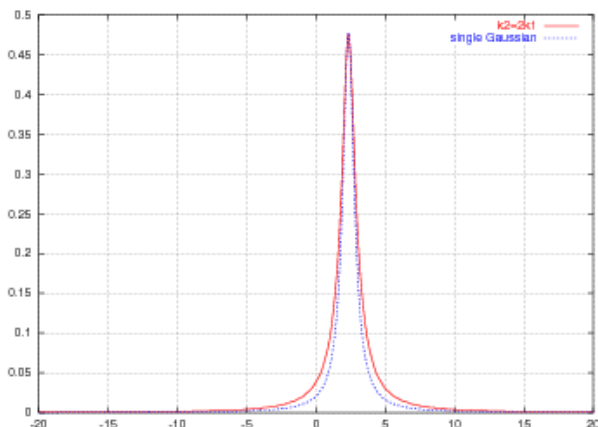
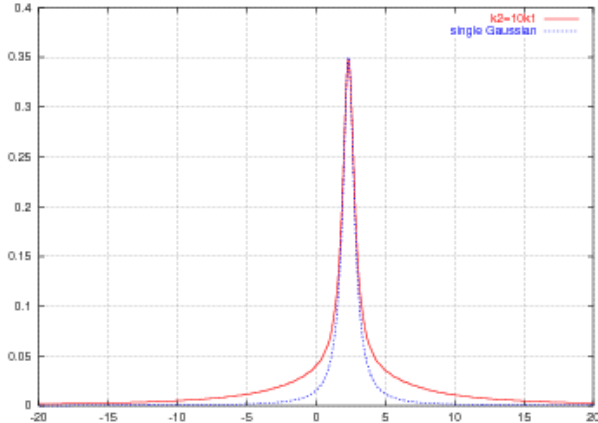
b. Beth yw effaith dechrau y parth amser ar $t_1 > 0$?

Yn y ddelwedd isod, mae'r signal parth-amser yn cael ei recordio o $t_1 = 0.3$. O ganlyniad, mae baslinellau y rhannau real a dychmygol wedi eu anffurfio gan don gyda chyfnod hir.



c. Beth yw'r ratio mwyaf $\frac{k_1}{k_2}$ ble mae'r cyfraniad spectraidd o'r ddau darfodiad yn amhosib i'w gweld?

Mae'r ddau delwedd isod yn dangos spectrymau (gyda un osgiliad yn unig) o'r signalau dwbl-esbonyddol ble mae'r darfodiad cyflym yn ddeg gwaith (top) a dwy waith (gwaelod) i gymharu a'r un araf. Mae'r cromlinau teneuaf yn linellau Gaussian unigol i ddangos y cyfraniad o'r cydran cyflym (llydan yn spectraidd).



d. Beth yw'r gwahaniaeth amledd perthynol lleiaf $\delta c = \frac{c_1 - c_2}{c_1}$ o'r ddau don i sicrhau eu bod yn dod allan fel pigau ar wahan yn y spectrwm?

Mae'r ddau ffigwr isod yn cynnwys spectra â dau amledd ac un darfodiad. Ar y top, mae $\delta c = 1$ yn cynhyrchu gwahaniad clir o'r pigau; ar y gwaelod, mae $\delta c = 0.25$ yn rhoi un pig, ond sylwch ar y lledaenu ar y pig.

