ph260 Ffiseg damcaniaethol 2 — gweithdy 5 — datrysiadau

1. Hafaliad ton.
Yn y ddarlith, fe ddatrysom hafaliad symudiad tant wedi ei *blycio*, h.y. tant sy'n dirgrynnu o hyd l a'i symudiad yn dechrau gyda'r dant yn llonydd ond mewn safle ansefydlog. Ei amodau terfyn oedd
$y(x,0) = \begin{cases} \frac{2hx}{l} \; (0 \le x \le \frac{l}{2}) \\ \frac{2h(l-x)}{l} \; (\frac{l}{2} \le x \le l) \end{cases}$ and $\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$

Os tarir y dant yn hytrach na'i blycio, e.e. mewn piano, mae'r amodau terfyn i'r gwrthwyneb: Mae'r llinyn mewn safle sefydlog ar y dechrau, ond oherwydd tariad y morthwyl, mae ar ei gyflymder mwyaf. Mae'r cyflymder cychwynol yma yn gymesurol i'r pellter o pen y dant. Gan ffurfio'r amodau terfyn mewn modd mathemategol, dewisiwch y datrysiad cyffredinol cywir i'r hafaliad don, cymhwyswch yr amodau terfyn, a ffeindiwch datrysiad cyfres $y(x,t)$ ar gyfer tant piano.

AT: $y(x,0) = 0$ *and* $\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = v(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l} \; (0 \le x \le \frac{l}{2}) \\ \frac{2h(l-x)}{l} \; (\frac{l}{2} \le x \le l) \end{cases}$ *(ble mae h mewn unedau o gyflymder).*
Datrysiad cyffredinol $y(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi vt}{l}$ *yn gymhwysiedig yma oherwydd* $\cos 0 = 1$.
Ehangu mewn cyfres: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi vt}{l}$.
Cymhwyso AT (2): $\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi v}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi vt}{l}$. *Felly, ar $t = 0$,* $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi v}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = v(x)$.
Gyda $d_n = b_n \frac{n\pi v}{l}$, *mae hyn yn rhoi y gyfres sin Fourier eto (union yr un fath a'r llinyn wedi'i blycio).*
Y datrysiad oedd $d_n = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$. *Felly,* $b_n = \frac{d_n l}{n\pi v} = \frac{8hl}{n^3\pi^3 v}\sin\frac{n\pi}{2}$.
Amnewid o fewn i $y(x,t)$ (not $\frac{\partial y}{\partial t}$!): $y(x, t = \sum_{\text{odd}\,n}) = \frac{8hl(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3\pi^3 v}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi vt}{l}$.

2. Drwm cartesiaidd.
Mae drymiau fel arfer yn grwn – am rhesymau mathemategol da fel y gwelwn. Ysgrifennwch yr hafaliad don $z(x,y,t) = \ldots$ ar gyfer drwm cartesiaidd, h.y. drwm efo croen wedi ei ymestyn dros ffram hirsgwar o faint $a \times b$. Gwahanwch yr hafaliad mewn i rhan gofodol ac amserol a ffeindiwch y datrysiadau cyffredinol. Cyfrifwch yr amodau terfyn i'r broblem (gan dybio fod y drwm yn cael ei daro i ddechrau'r dirgyniad), penderfynwch pa un o'r datrysiadau cyffredinol sy'n anaddas oherwydd eu bod yn anghytuno â'r amodau terfyn, ac ysgrifennwch cyfuniad llinol o'r datrysiadau eraill fel datrysiad cychwynol i'r hafaliad don. A fydd sain y drwm cartesiaidd yn harmonig?

Hafaliad: $z(x,y,t) = \nabla z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.
Felly V($z(x,y,t) = A(x,y)T(t)$*):* $\frac{1}{A}\nabla A = \frac{1}{v^2 T}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = -k^2$.
Hafaliad amserol – HDC 2il radd gyda cyfernodau cyson: $T(t) = \cos kvt$ or $\sin kvt$.
Hafaliad gofodol – felly V($A(x,y) = X(x)Y(y)$*):* $\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + k^2 = -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -l^2$.
Mae defnyddio $-l^2$ hytrach na $+l^2$ fel cysonyn gwahanu yn penderfynu fod y datrysiad yn osgileiddio yn x ond yn wanychol yn y. Er hyn, mae'r broblem yn gymesurol gyda pherthynas i gyfnewid x a y; mae yna osgiliad gwanychol ar hyd y ddau. Or herwydd, rydym angen cyfuniad llinol o'r ddau datrysiad i'r ddau newidyn:
$X(x) = c_1 \sin\sqrt{k^2+l^2}x + c_2 \exp \pm lx$ *a'r un fath i Y(y). Mae'r datrysiadau* cos *wedi eu diddymu gan nad fyddent yn sero lle mae'r croen yn cwrdd a'r ffram.*
Gan fod y croen yn feidrol yng nghyfeiriad x a y, ni allen gwaredu'r datrysiad esbonyddol cynnyddgar. Yn lle, mae'r esbonyddion sy'n gostwng a cynyddu yn cael eu cyfuno mewn i ffwythiant sinh *fel yng nghwestiwn yr wythnos diwethaf 2:*
$X(x) = c_1 \sin\sqrt{k^2+l^2}x + c_2 \sinh\left(l(a-x)\right)$ *a thebyg i* $Y(y)$.
Yn olaf, gallwn gymhwyso'r amodau cyfnodol $\sqrt{k^2+l^2} = \frac{n\pi}{a}$ *a* $\sqrt{k^2+l^2} = \frac{m\pi}{b}$.
O hyn ymlaen, gallwch gymhwyso'r AT sy'n weddil i ffeindio'r gyfres Fourier yng nghyfeiriadau x a y ill dau, gan rhoi swm ddwbwl dros n a m.
Nid yw'r drwm Cartesiaidd oherwydd fod y term sinh *yn anffurfio yr amledd (hyd yn oed i $a = b$). Mae drwm go iawn â chroen crwn, a mae'r hafaliad don yn hawdd i'w ddatrys mewn cyfesurynnau pegynol. Gan fod croen crwn yn osgileiddio yn y cyfeiriad rheiddiol yn unig, mae'r swn o ganlyniad yn harmonig, h.y. yn cynnwys harmonics o'r datrysiad $n = 1$ yn unig.*

Cydnabyddiaeth.
Mae esiampl 1 wedi ei ddwyn o *ML Boas; Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley, New York (USA)* [2]*1983.*

rw/031027– cyfieithwyd 080917 gan Huw Morgan