ph260 Ffiseg damcaniaethol 2 — gweithdy 4 — datrysiadau

1. Hafaliad Laplace.
Penderfynwch proffil tymheredd mewn plat hir tenau 10 uned hyd o lêd gyda'r ochrau hir a'r ochr byr pella ar dymheredd o sero. Mae'n cael ei gynhesu mewn un cornel o'r ochr byr arall; mae'r proffil tymheredd ar yr ochr o ganlyniad yn dynesu'n gymesurol i x. Gadewch i'r ochr hir fod yn gorwedd yng nghyfeiriad yr echel y.
Yr amodau terfyn yw: $T(0,y) = T(10,y) = T(x,\infty) = 0$ a $T(x,0) = x$ (yn gywir ax, ond gan fod gennym unedau mympwyol gallwn osod y cysonyn cymesurol i un).
O'r wyth datrysiad cyffredinol i hafaliad Laplace, gallwn diddymu:
— y rhai sy'n osgileiddio ar hyd y oherwydd $T(x,\infty) = 0$,
— y rhai sy'n cynyddu ar hyd y oherwydd $T(x,\infty) = 0$,
— $T(x,y) = \mathrm{e}^{-ky}\cos kx$ oherwydd $T(0,y) = 0$.
Yr un ar ôl yw $T(x,y) = \mathrm{e}^{-ky}\sin kx$.
Mae cymhwyso $T(10,y) = 0$ yn gofyn $\sin 10k = 0$, h.y. $k = \frac{n\pi}{10}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$.
Mae'r datrysiad yn gyfuniad llinol o'r datrysiadau gyda phob gwerth posib o k:
$T(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{10}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{10}}$.
Gellir ffeindio'r cyfernodau Fourier drwy: $b_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} x\sin\frac{n\pi x}{10}\mathrm{d}x$,
sy'n arwain at $b_n = \pm\frac{20}{n\pi}$ i (n od/gwastad).
Felly, y datrysiad yw $T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{20(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{10}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{10}}$ (mae'r term $n = 0$ yn sero ta beth).

2. Hafaliad Laplace mewn plat meidrol.
Fel uchod, ond torrwch y plat hir i 30 hyd uned a cadwch e ar dymheredd o sero yna.
Newidir $T(x,\infty) = 0$ gan $T(x,30) = 0$.
Cadwch yr esbonydd sy'n cynnyddu yn y datrysiad a gwnewch yn siwr fod y ddau derm yn diddymu ar $y = 30$:
$T(x,y) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{k(30-y)} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-k(30-y)}\right)\sin kx = \sinh(k(30-y))\sin kx$.
Mae cymhwyso $T(10,y) = 0$ yn gofyn am $\sin 10k = 0$, i.e. $k = \frac{n\pi}{10}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$.
Mae'r datrysiad yn gyfuniad llinol o'r datrysiadau gyda phob gwerth posib o k:
$T(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sinh(k(30-y))\sin kx$.
Gyda $d_n = b_n \sinh 3\pi n$, mae hwn yn rhoi'r cyfres sin cyfarwydd; y d_n yw'r b_n o'r esiampl blaenorol.
Datrysiad: $T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{20(-1)^{n+1}}{n\pi\sinh 3\pi n}\sin\frac{n\pi x}{10}\sinh\frac{(30-y)n\pi}{10}$.

3. Hafaliad tryllediad
Mae bar 20 uned hyd efo ochrau wedi eu ynysu ar dymheredd o 100 yn gychwynnol, heblaw am y pennau, sydd ar tymheredd sero drwy'r arbrawf. Ffeindiwch dosbarthiad y tymheredd drwy'r bar ar amser t.
AT: $T(0,t) = T(20,t) = 0$ a $T(x,0) = 100$.
Yn yr achos 2D, fe ddatrysir yr hafaliad tryllediad yn gyffredinol gan:
$T(x,y,t) = \mathrm{e}^{\pm ly - \alpha^2k^2t}\sin\sqrt{k^2+l^2}x$ *(neu'r term cos cyfatebol gyda newid y x a y).*
Yn yr achos 1D yma, nid oes angen y term y a'r cysonyn gwahanu k , felly:
$T(x,t) = \mathrm{e}^{-\alpha^2k^2t}\sin kx$ *(neu'r term cos cyfatebol).*
Mae angen y fersiwn sin yma oherwydd y $T(0,t) = 0$.
Mae cymhwyso $T(20,t) = 0$ yn rhoi $k = \frac{n\pi}{20}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ fel arfer.
Swm y cyfuniadau llinol o'r datrysiadau posib yw $T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2t}{400}}\sin\frac{n\pi x}{20}$,
ble mae $b_n = \frac{400}{n\pi}$ ar gyfer n od yn unig (a 0 fel arall).
Datrysiad: $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{400(-1)^{n+1}}{n\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2t}{400}}\sin\frac{n\pi x}{20}$.

4. Ehangiadau gwastad ac od.
Yn y ddarlith, fel ehangwyd ffwythiant anghyfnodol, sy'n cael ei ddiffinio mewn ystod cyfyngedig yn unig, fel ffwythiant cyfnodol od (golygir *od* fel $f(-x) = -f(x)$), fel bod modd ei ehangu fewn i cyfres sin. Y ffwythiant a ddefnyddid yn yr esiampl oedd $f(x) = \left\{\begin{smallmatrix}1\,(0<x<\pi)\\0\,(\text{ofelarall})\end{smallmatrix}\right.$. Bydde yr un fath pe bawn wedi ehangu $f(x)$ i ffwythiant *gwastad* ($f(-x) = f(x)$) a'i ehangu i cyfres cosin. Ymgeisiwch hyn, ffeindiwch y cyfernodau, a dangoswch fod y canlyniad yr un fath trwy'r ystod lle ddiffinir $f(x)$ drwy plotio'r termau cyntaf.
Mae'r ffwythiant symlaf sy'n ffitio yn newid rhwng ± 1 gyda hanner cyfnod o $l = 2\pi$, wedi ei ganoli ar $x = 0$. Nodwch fod hwn yn ddwywaith y cyfnod sydd ei angen ar y gyfres sin.
Yr ehangiad cosin yw $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$. Nodwch yma fod fel arfer angen y term $n = 0$.
Y cyfernodau Fourier yw $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$.

Yn yr esiampl hwn, $a_n = 0$ a $a_n = \pm\frac{2}{n\pi}$ ar gyfer n gwastad ac od, yn eu trefn (gyda $n = 1, 5, 9, \ldots$ yn cynhyrchu y datrysiadau posotif a $n = 3, 7, 11, \ldots$ y rhai negatif).

Cydnabyddiaeth.
Mae esiamplau 1-3 wedi eu dwyn neu eu newid o *ML Boas; Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley, New York (USA) ^{2}1983.*

rw/031023– cyfieithwyd 080917 gan Huw Morgan