ph260 Ffiseg damcaniaethol 2 — gweithdy 3 — datrysiadau

1. Datrys HDC gradd uwch llinol
Datryswch y HDC 2il a 3ydd gradd canlynol.

a. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 0; \qquad y(0) = 12; \qquad y(12) = 0.$
Canlyniad: $y \approx 12\mathrm{e}^{-2x}$

b. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y = 0; \qquad y(1) = y(-1); \qquad y(0) = 1.$
Canlyniad: $y \approx -0.57\mathrm{e}^{-3x} + 1.57\mathrm{e}^{-2x}$

c. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 9y = 12\mathrm{e}^{-x}; \qquad y(-1) = 30; \qquad y(0) = 3.$
Yn gyntaf, datryswch yr hafaliad homogenaidd cyflenwol.
Mae dau isradd ei polinomial rhinweddol yn unionfath - felly lluoswch un o'r termau gyda x.
Ffwythiant cyflenwol: $y_c = c_1\mathrm{e}^{-3x} + c_2x\mathrm{e}^{-3x}$.
Mae datrysiad penodol yn debygol o fod o'r ffurf $y_p = a\mathrm{e}^{-x}$. *Amnewid fewn i'r hafaliad differol i ffeindio* a.
Ffwythiant penodol: $y_p = 3\mathrm{e}^{-x}$.
Datrysiad llawn, gyda amodau terfyn wedi eu cymhwyso: $y(x) = y_c(x) + y_p(x) \approx -1.09x\mathrm{e}^{-3x} + 3\mathrm{e}^{-x}$.

d. $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 9\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 5y = 0.$
Gellir dyfalu'r isradd cyntaf fel $u_1 = -1$.
Rhannu'r polinomial rhinweddol gan $(u - u_1) = (u + 1)$.
Ffeindio'r israddau eraill o'r fformiwla cwadrataidd.
Mae un isradd yn ddwbwl (-1), *felly lluosi un o'r termau gyda* x.
Canlyniad: $y = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2x\mathrm{e}^{-x} + c_3\mathrm{e}^{5x}$.

e. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 3\mathrm{e}^{2x}.$
Ni ellir dyfalu datrysiad penodol oherwydd fod yr ochr dde yn ddatrysiad o'r hafaliad differol cyflenwol homogenaidd.
Ffactoreiddio'r hafaliad i gael $(\frac{\partial}{\partial x} + 1)(\frac{\partial}{\partial x} - 2)y = 3\mathrm{e}^{2x}$.
Diffinio $u = (\frac{\partial}{\partial x} - 2)y$ *a datrys* $(\frac{\partial}{\partial x} + 1)u = 3\mathrm{e}^{2x}$.
Canlyniad ar gyfer u*:* $u = \mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^{-x}$.
Datrys $(\frac{\partial}{\partial x} + 1)y = u = \mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^{-x}$.
Canlyniad: $y = x\mathrm{e}^{2x} - \frac{c_1}{3}\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{2x}$.

2. Gwahanu HDR
Datryswch y HDR homogenaidd canlynol trwy Gwahanu Newidion.

a. $\frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$
Canlyniad: $z(x, y) = c_1\mathrm{e}^{c(2y-x)}$.

b. $\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$
Canlyniad: $z(x, y) = \frac{x+d}{y+e}$.

c. $\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$
Canlyniad: $z(x, y) = d\mathrm{e}^{cy}x^{-c}$.

3. Modeli trylediad.
Mae'r hafaliad trylediad mewn nodiant ffisegol arferol yn wrthdro o'i ffurf yn y taflen gymorth: Mewn geometreg un-dimensiwn: $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, ble D yw'r cyfernod tryledіad, sy'n gyson mewn systemau sy'n bihafio'n dda. Os hyn yw'r achos, gall$D$ fynd cyn y differydd: $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, sydd yn union fel y taflen gymorth. Mewn systemau sydd ddim yn bihafio gystal, fel y rhai rydym yn delio gyda yn y Grwp Defnyddiau, mae $D = D(x)$ mewn gwirionedd yn ffwytthiant o'r cyfesuryn gofodol. Does dim modd i ni wybod y dibynniaeth yma'n union, ond rydym yn gwybod y dibynniaeth crynhoad $D = D(c)$ o data yn y llenyddiaeth, a gallem ddyfalu proffil y crynhoad $c(x)$. Pa hafaliad differol sydd ei angen i ddatrys $c(x, t)$? Dosbarthwch yr hafaliad differol yn nhermau'r rhinweddau a drafodwyd yr wythnos diwethaf.

Cymhwyso'r rheol gadwyn: $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right) = \frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x} + D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$.
Nid ydym yn gwybod $\frac{\partial D}{\partial c}$*, ond oherwydd* $D(c(x))$ *gallwn gymhwyso'r rheol gadwyn eilwaith:* $\ldots = \frac{\partial D}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x} + D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial D}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 + D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$.
Felly, mae hwn yn hafaliad differol rhannol (mae c *yn ffwythiant o* x *a* t*) 2il radd (mae'r deilliad uchaf yn 2il radd) heterogenaidd (nid yw'r ochr chwith yn cynnwys* x *nag unrhyw un o'i ddeilliadau) aflinol (mae'r deilliad gradd 1af wedi ei sgwario).*

4. Ffactoreiddio'r polinomial rhinweddol.
Pan yn datrys HDC 2il radd gyda cyfernodau cyson, rydym yn lleihau'r HDR i ddau HDC drwy ffactoreiddio'r polinomial rhinweddol. Rhoddir y cysonion ym mhob ffactor fel $k_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ os yw'r polinomail yn $x^2 + bx + c = (x+k_1)(x+k_2)$. Profwch hyn.
$x^2 + bx + c = (x+k_1)(x+k_2) = x^2 + k_1 x + k_2 x + k_1 k_2$.
Ffeindir k_2 *drwy'r fformiwla cwadrataidd:* $k_2 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$*, a* $k_1 = k_2 - b = -(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}) = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

Cydnabyddiaeth.
Mae rhan fwyaf o'r esiamplau hyn wedi eu dwyn neu eu newid o *ML Boas; Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley, New York (USA)* ^{2}*1983.*

rw/031015– cyfieithwyd 080917 gan Huw Morgan