ph260 Ffiseg damcaniaethol 2 — gweithdy 2 — datrysiadau

1. Dosbarthu hafaliadau differol.
Penderfynwch gradd yr hafaliadau differol canlynol, nodwch os ydynt yn llinol neu aflinol, homogenaidd neu anhomogenaidd ac yn gyffredin neu'n rhannol. Faint o amodau terfyn sydd angen i ffeindio datrysiad penodol i bob un? Ffeindiwch esiamplau o'r fath o hafaliad differol a ddisgrifir ar waelod y tabl a nodwch faint o amodau terfyn sydd angen ar eich esiampl (mae a,b,c,d yn gysonion sydd ddim yn sero).

	gradd	llinol?	cyffredin?	homo-genaidd?	nifer o AT
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} + 3y = 13$	2	+	−	−	3
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0$	1	+	+	+	1
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = -y$	1	−	+	+	1
$\frac{\partial z}{\partial x} + 5z + 3y^2 = a$	1	−	−	−	1
$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{b}{z} = 0$	3	+	−	+	3
$a\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial x}$	1	+	−	+	2
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -y$	2	+	+	+	2
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$	1	−	+	−	1
$e.g. \frac{\partial^3 z(x,y)}{\partial x^3} + az = 0$	3	+	−	+	3
$e.g. \frac{\partial z}{\partial x} + ay + bz = c$	1	+	−	−	1
$e.g. \sin\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) + ay = 0$	2	−	+	+	1

2. Dewis strategaethau datrys ar gyfer HDC.
Penderfynwch os oes modd datrys yr HDC canlynol drwy wahaniad, drwy defnyddio'r triniaeth cyffredinol ar gyfer HDC llinol, drwy ddefnyddio hafaliad Bernoulli neu drwy cymhwyso y driniaeth hafaliad homogenaidd, neu os yw'n achos styfnig sydd angen ymchwil pellach mewn llyfr mathemateg... Os nad yr achos diwethaf yw, datryswch yr hafaliad, yna cymhwyswch yr amodau terfyn os ydynt wedi eu nodi. Os nad ydech yn medru datrys yr hafaliad, dywedwch pam fod pob techneg yn ffaelu.

a. $xy' - xy = y \quad ; \quad y(1) = 1$
Datrys trwy wahanu: $\frac{1}{y}\mathrm{d}y = \frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.
Canlyniad: $y(x) = x\mathrm{e}^{x-1}$.

b. $y' + y\cos x = \sin 2x$
Dim modd gwahanu: 3 term, pob un wastad yn cynnwys x a y.
Datryswch gyda'r ffformiwla cyffredinol ar gyfer HDC llwyr llinol: $y' + \cos(x)y = sin(2x)$.
Mae cymhwyso'r ffformiwla yn arwain at: $y(x) = \mathrm{e}^{-\sin x}\left(\int \sin(2x)\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x + c\right)$.
Rwy'n dyfalu bod modd datrys trwy amnewid, ond heb drio eto.

c. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy^2+x}{x^2y-y}$
Datrys trwy wahanu: $\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{y}{2y^2+1}\mathrm{d}y$.
Mae pob ochr wedyn yn cymryd rheol lluoswm ($\int fg\mathrm{d}x = f\int g\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\int g\mathrm{d}^2x$) i ddiddymu'r x neu'r y yn yr enwadur. Mae'r integreiddion gweddill o'r ffurf $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ a mae modd edrych am eu datrysiadau.

d. $3xy^2y' + 3y^3 = 1 \quad ; \quad y(0) = -8$
Dim modd gwahanu: 3 term, pob un wastad yn cynnwys x a y.
Dim yn llwyr llinol: mae'r term y^3 yn atal defnydd y ffformiwla cyffredinol.
Datrys â thriniaeth Bernoulli: $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{3x}y^{-2}$.

Nodwch fod $\mathrm{e}^{-a\ln(x)+c} = b\mathrm{e}^{-a\ln(x)} = b\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^{-a} = bx^{-a}$ *(ble $b = e^c$).*
Canlyniad cyn cymhwyso amod terfyn: $y = \left(\frac{1}{3} - cx^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}$.
Mae'n ddrwg gennyf fod yr amod terfyn yn anghywir - nid yw'n gymhwys â'r datrysiad cyffredinol.

e. $x^2y' + 3xy = 1 \quad ; \quad y(3) = 0$
Dim modd gwahanu: 3 term, pob un wastad yn cynnwys x a y.
Datryswch gyda'r ffformiwla cyffredinol ar gyfer HDC llwyr llinol: $y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^2}$.
Canlyniad: $y(x) = \frac{1}{2x} - \frac{9}{2x^3}$.

f. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos y - x \tan y}$; $y(0) = \pi$

Mae'n well datrys yr un yma ar ben i lawr - datrys ar gyfer x(y) yn hytrach na y(x): $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos(y) - x\tan(y)$.
Dim modd gwahanu: 3 term, pob un wastad yn cynnwys x a y.
Datryswch gyda'r fformiwla cyffredinol ar gyfer HDC llwyr llinol: $x' + \tan(y)x = \cos y$.
Canlyniad: $x(y) = (y - \pi)\cos y$. *Os ydych yn bedantig, gallwch aildrefnu hwn i rhoi* $y(x) = \dots$

g. $xy\mathrm{d}x + (y^2 - x^2)\mathrm{d}y = 0$

Dim modd gwahanu: 3 term, pob un wastad yn cynnwys x a y.
Dim yn llwyr llinol: mae'r term y^2 yn atal defnydd y fformiwla cyffredinol.
Dim yn math Bernoulli: Ni ellir newid y cynffactor $p(x)$ fel ffwythiant o x yn unig.
Hafaliad homogenaidd - amnewid $v = \frac{y}{x}$, *yna gwahanu:* $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1-v^2}{v}\mathrm{d}v$.
Canlyniad ar ôl amnewid: $y = x^2 \mathrm{e}^{\frac{y^2}{2x^2}}$ *(nodwch fod hwn yn fformiwla cylchol yn cynnwys y ar y ddwy ochr).*

h. $\cos x \cos y \mathrm{d}x - \sin x \sin y \mathrm{d}y = 0$; $y(\frac{\pi}{2}) = \pi$

Datrys trwy wahanu: $\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y$.
Canlyniad: $\sin x \cos y = -1$. *Eto, gallwch aildrefnu hwn i'r ffurf* $y(x) = \dots$.

Peidiwch anghofio y gallwch (a dylwch!) gwirio'ch datrysiad drwy ei amnewid i'r hafaliad differol gwreiddiol!

3. Cyfieithu ffiseg i mathemateg.

Ysgrifennwch y problemau ffisegol canlynol mewn fformiwla mathemategol. Yna newidiwch y newidion yn y fformiwla gyda'r rhai o'r daflen gymorth mathemategol. Dywedwch pa driniaeth byddai'n datrys yr hafaliad, yna datryswch ef.

a. Deilliwch fformiwla ar gyfer tyfiant haen o rhew ar lyn mewn tywydd oer. I gadw'r broblem yn syml, tybiwch fod tymheredd yr hylif yn gyson T_l=283 K, fod yr aer uwchben yn gyson ar T_g=263 K, a fod y rhew yn tyfu mewn haen o drwchder unffurf $x(t)$ gydag amser t. Mae cyfradd ffurfio'r rhew yn gyfesur a'r graddfa mae gwres yn mynd o'r hylif i'r aer uwchben. Dechreuwch ar y foment cyn fod y rhew yn ffurfio.

Mae cyfnewid gwres yn gyfesur a'r graddiant tymheredd $\frac{T_l - T_g}{x}$.
Arweinir hyn at y HDC $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \kappa\frac{T_l - T_g}{x}$, *ble κ yw dargludedd thermol y rhew.*
Cyfieithu gan ddefnyddio nodiant y taflen gymorth mathemateg (os dymunwch) ($x \to y$, $t \to x$, $\kappa(T_l - T_g) = a$): $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a}{x}$.
Datrys drwy gwahanu (mewn nodiant ffiseg): $x\mathrm{d}x = \kappa(T_l - T_g)\mathrm{d}t$.
Canlyniad: $x(t) = \sqrt{2\kappa(T_l - T_g)t}$ *gan ddefnyddio yr amod terfyn* $x(0) = 0$.

b. Dilyniant darfodiad Uraniwm yw $^{238}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta} {}^{234}\mathrm{Pa} \xrightarrow{\beta} {}^{234}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{230}\mathrm{Th} \xrightarrow{\alpha} {}^{226}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{Rn}222 \xrightarrow{\alpha} {}^{218}\mathrm{Po} \xrightarrow{\alpha} {}^{214}\mathrm{Pb} \xrightarrow{\beta} {}^{214}\mathrm{Bi} \xrightarrow{\beta} {}^{214}\mathrm{Po} \xrightarrow{\alpha} {}^{210}\mathrm{Pb} \xrightarrow{\beta} {}^{210}\mathrm{Bi} \xrightarrow{\beta} {}^{210}\mathrm{Po} \xrightarrow{\alpha} {}^{206}\mathrm{Pb}$ (sefydlog). Cyfrifwch y nifer N_{15} o ^{206}Pb sefydlog fel ffwythiant o amser os ydych yn cychwyn gyda slabyn o ^{238}U yn cynnwys N_0 atom. Mae hanner bywyd yr isotopau yn cael eu dynodi gan λ_i ar gyfer isotop i yn y gadwn, gan ddechrau o i=1 ar gyfer ^{238}U.

Awgrym: Yn gyntaf tybiwch bod dim ond un cam yn y gadwyn, yn hytrach na nifer o gamau unigol. Yna adiwch yr ail gam. Trwy cydgyfatebiaeth, cyfrifwch y fformiwla ar gyfer cam i. Gallwch yna gweithio'r ffordd gam wrth gam drwy'r holl ddilyniant, neu sefydlu fformiwla ailadroddus.

Os mai dim ond un cam, $\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\lambda_1 N_1$, *a ellir ei ddatrys trwy wahanu.*
Canlyniad: $N_1 = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}$.
Yn yr ail gam, mae graddfa newid poblogaeth ^{234}Th *yn gydbwysedd o ddarfodiad y niwcliai* ^{234}Th *a'r niwcliai* ^{234}Th *sydd newid eu ffurfio drwy ddarfodiad* ^{238}U: $\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$.
Dim modd gwahanu: 3 term, pob un wastad yn cynnwys t a N_2.
Datrys trwy'r fformiwla cyffredinol ar gyfer HDC llwyr llinol: $\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1$. *(Nodwch mai N_2 yw'r newidyn dibynnol tra fod N_1 yn ffwythiant o'r newidyn annibynnol t yn unig.)*
Canlyniad: $N_2 = \frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right)$ *gan ddefnyddio'r amod terfyn* $N_2(0) = 0$ *(h.y.* ^{238}U *pur i ddechrau).*
Felly, ar gyfer cam i, mae gennym $\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \lambda_{i-1}N_{i-1} - \lambda_i N_i$ *a felly* $N_i = \frac{\lambda_{i-1}N_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_{i-1}t} - \mathrm{e}^{\lambda_i t}\right)$.
Oherwydd yr ailadroddiad yn y fformiwla hwn, mae'r cyfanswm o'r isotop i ar unrhyw amser yn
$N_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_{i-1}t} - \mathrm{e}^{\lambda_i t}\right) \times \frac{\lambda_{i-2}}{\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_{i-2}t} - \mathrm{e}^{\lambda_{i-1}t}\right) \times \cdots \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right) \times N_0\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}$,
neu, gan ddefnyddio'r symbol $\Pi_{j=1}^{i-1}$ *ar gyfer y lluoswm o'r indecs* $j = 1$ *i* $j = i - 1$,
$N_i = N_0\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\Pi_{j=1}^{i-1}\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_j t} - \mathrm{e}^{-\lambda_{j+1}t}\right)$.

Wedi ffeindio'r datrysiad yn algebraidd, gallwch dodi rhifau yn y fformiwla a meddwl am oblygiadau storio gwastraff niwclear. Dyma'r hanner bywyd mewn blynyddoedd, dyddiau neu eiliadau.

$\lambda_1 = 4.468 \times 10^9\,a$	$\lambda_4 = 244\,600\,a$	$\lambda_7 = 3.825\,d$	$\lambda_{10} = 1\,194\,s$	$\lambda_{13} = 5.013\,d$
$\lambda_2 = 24.10\,d$	$\lambda_5 = 75\,400\,a$	$\lambda_8 = 183\,s$	$\lambda_{11} = 1.64 \times 10^{-4}\,s$	$\lambda_{14} = 138.38\,d$
$\lambda_3 = 70.2\,s$	$\lambda_6 = 1\,600\,a$	$\lambda_9 = 1\,608\,s$	$\lambda_{12} = 22.3\,a$	

Hwn yw un o'r dilyniannau darfodiad sy'n digwydd yn naturiol. Yn syml, mae'r cam cyntaf mor araf fel gellir meddwl am y camau eraill fel rhai sy'n digwydd yn unionsyth. Mae'r rhan fwyaf o'r atomau mewn sampl yn innau ^{238}U *neu* ^{206}Pb. *Fodd bynnag, nid yw* ^{238}U *o unrhyw werth fel tannwydd (yn rhannol oherwydd ei sefydlogrwydd), a mae cynhyrchion canolradd yn chwarae rhan bwysig yn proffwydo syt mae gwastraff niwclear yn bihafio.*

4. Deillio'r deilliadau.
Pan yn delio gyda thriniaeth hafaliad Bernoulli, rydym wedi defnyddio yr amnewidiad $z = y^{1-n}$ a'i ddeilliad $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Dangoswch fod y deilliad yma'n gywir.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(y^{1-n}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Nodwch er fod y cam cyntaf yn edrych yn union fel lluosiad gan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$, *nid hwn yw'r achos: mewn gwirionedd, mae'r rheol gadwyn yn cael ei gymhwyso i'r ffwythiant* $z(y(x))$ *yma.*

Cydnabyddiaeth.
Mae rhan fwyaf o'r esiamplau hyn wedi eu dwyn neu eu newid o *ML Boas; Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Wiley, New York (USA)* ^{2}*1983.*

rw/031012– cyfieithwyd 080917 gan Huw Morgan